

# UNIVERSITÄT TÜBINGEN

## PHYSIKALISCHES PRAKTIKUM II

PO

---

# Doppelbrechung

---

*Von:*

Maximilian Hilbert  
Patrick Tscheppe  
Fabian Kraus

*Betreuung:*

S. Struzek

10. Dezember 2021

## Inhalt

<b>1</b>	<b>Versuchsbeschreibung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Physikalische Grundlagen</b>	<b>1</b>
2.1	Polarisation von Licht . . . . .	1
2.2	Doppelbrechung . . . . .	1
2.3	Erzeugung bzw. Überlagerung von polarisiertem Licht . . . . .	2
2.3.1	Quarzkeil . . . . .	3
2.3.2	$\frac{\lambda}{4}$ -Plättchen . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Versuchsdurchführung</b>	<b>4</b>
<b>4</b>	<b>Ergebnisse &amp; Auswertung</b>	<b>5</b>
4.1	Quarz I . . . . .	5
4.2	Quarz II . . . . .	5
4.3	$\frac{\lambda}{4}$ -Plättchen . . . . .	6
4.4	Fazit . . . . .	6

# 1 Versuchsbeschreibung

Bei diesem Versuch wird die Doppelbrechung an einem Quarzkristall mithilfe von Polarfiltern und  $\lambda/4$ -Plättchen untersucht.

## 2 Physikalische Grundlagen

### 2.1 Polarisation von Licht

Für den Versuch kann Licht als Elektromagnetische Welle betrachtet werden. Elektromagnetische Wellen sind transversal, dabei schwingen die elektrischen und magnetischen Feldvektoren stets senkrecht zueinander und senkrecht zur Ausbreitungsrichtung  $\vec{k}$  d.h.  $\vec{E}, \vec{B}, \vec{k}$  bilden ein kartesisches Dreibein. Im Nahfeld einer Lichtquelle schwingen  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  um  $90^\circ$  phasenverschoben, Im Fernfeld sind sie nahezu phasengleich.

Die räumliche Ausrichtung der Feldvektoren und deren zeitlichen Verlauf bezeichnet man als Polarisation. Bei linear polarisiertem Licht schwingt der Vektor innerhalb einer festen Ebene (zu jedem Zeitpunkt die selbe Ebene), die durch den Wellenvektor  $\vec{k}$  hindurchgeht. Würde man die zeitliche Varianz des Feldes vernachlässigen und nur die Amplitude betrachten, so würde diese eine geradlinige Bewegung fortführen.

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cdot \exp(i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)) \quad E_0 = \text{konst.}$$

Bei einer zirkular polarisierten Licht bewegt sich die Amplitude spiralförmig durch den Raum und lässt sich darstellen mit

$$\vec{E} = E_0 \cdot \begin{pmatrix} \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t) \\ \sin(\vec{k}\vec{r} - \omega t) \end{pmatrix} \quad E_0 = \text{konst.}$$

Man nennt die Polarisation des  $\vec{E}$ -Feldes beim Blick auf den Wellenvektor rechts zirkular, wenn sich der Vektor im Uhrzeigersinn dreht und links zirkular, wenn er sich gegen den Uhrzeigersinn bewegt.

Die beiden zuvor genannten Polarisationsarten sind Spezialfälle elliptisch polarisierten Lichtes, wobei die Amplitude entlang einer Ellipse rotiert (aus einem Blickwinkel parallel zur Ausbreitungsrichtung).

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t) \\ E_y \sin(\vec{k}\vec{r} - \omega t) \end{pmatrix} \quad E_x, E_y = \text{konst.}$$

Es ist ausreichend, dass verhalten der Polarisation der elektrischen Feldstärke zu betrachten, da diese um den Faktor  $10^8$  größer als die der magnetischen Feldstärke ist.

### 2.2 Doppelbrechung

Trifft eine elektromagnetische Welle auf ein anderes Medium, so ändert sich deren Geschwindigkeit und Ausbreitungsrichtung nach dem Fermat'schen Prinzip. Der Brechungsindex ist über die Lichtgeschwindigkeit  $c$  definiert als

$$n = \frac{c}{v_{\text{med}}}$$

Um so höher der Brechungsindex eines Materials, desto langsamer breitet sich die Welle darin aus.

Bei doppelbrechenden Materialien besitzt die Welle in unterschiedlichen Raumrichtungen auch unterschiedliche Brechungsindices. Trifft nun ein Lichtstrahl auf einen doppelbrechenden Körper, so wird er in zwei linear polarisierte Teilstrahlen, die sich im Allgemeinen mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten fortbewegen können, aufgespaltet. Den Teilstrahl, der in allen Einfallrichtungen

einen gleichbleibenden Brechungsindex aufweist, nennt man ordentlicher Strahl. Der zweite Teilstrahl verhält sich je nach Richtung des einfallenden Strahls unterschiedlich und verhält sich nicht nach dem Snelliusschen Brechungsgesetz, weshalb er als außerordentlicher Strahl bezeichnet wird. Beide Teilstrahlen behalten ihre jeweilige Schwingungsrichtung nach dem Verlassen des doppelbrechenden Objekts bei, d.h. schickt man unpolarisiertes Licht durch einen doppelbrechenden Kristall, so hat man nach dem Durchlaufen des Kristalls zwei linear polarisierte Wellen, deren Schwingungsrichtung senkrecht zueinander orientiert sind. Die beiden Teilstrahlen werden im Allgemeinen aufgespaltet, also in unterschiedliche Richtungen gebrochen.

Bei doppelbrechenden Stoffen gibt es mindestens eine Einfallsrichtung, bei der die Brechungsindizes des ordentlichen Strahles  $n_o$  und außerordentlichen Strahls  $n_{ao}$  gleich sind, diese Einfallsrichtung definiert man als die (kristall)optische Achse. Die Ebene die durch den einfallenden Strahl und die optische Achse aufgespannt wird nennt man Hauptschnitt. Die Schwingungsrichtung der Feldstärke des außerordentlichen Strahls schwingt in dieser Ebene, die des ordentlichen Strahls senkrecht dazu.

Im Versuch betrachtet man linear polarisiertes Licht, welches senkrecht auf ein doppelbrechendes Medium trifft. In diesem Fall kommt es zu keiner Aufspaltung der einzelnen Teilstrahlen, da keine Brechung hervorgerufen wird, jedoch werden diese unterschiedlich aufgrund der verschiedenen Brechungsindices abgebremst. Nach verlassen des Mediums besitzen ordentlicher und außerordentlicher Strahl einen Gangunterschied gemäß der Differenz des optischen Weges der beiden Strahlen, die ein Medium der Dicke  $s$  durchlaufen und gegeben ist durch:

$$\Delta OW = s(n_{ao} - n_o) =: s\Delta n$$

Da die Differenz der optischen Weg gerade den Gangunterschied der Wellen zueinander ist, folgt aufgrund der Ähnlichkeit von Kreisen  $\frac{\Delta OW}{\lambda} = \frac{\Delta \varphi}{2\pi}$

$$\Delta \varphi = \frac{2\pi s \Delta n}{\lambda}$$

## 2.3 Erzeugung bzw. Überlagerung von polarisiertem Licht

In der Natur kommt meist unpolarisiertes Licht vor, welches aber durch bestimmte Effekte und Apparate polarisiert werden kann. Das Grundprinzip der nachfolgenden Bauteile liegt darin, zwei linear polarisierte Wellen mit selber Frequenz um einen Phase zu verschieben, sodass durch Überlagerung dieser beiden Wellen andere Polarisationen erhalten werden.

Zwei phasengleiche linear polarisierte Wellen deren Amplituden zueinander um einen fixen Winkel verschoben sind, führen wieder zu einer linear polarisierten

$$\vec{E}_1 + \vec{E}_2 = E_{0,1} \cdot \exp(i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)) + E_{0,2} \cdot \exp(i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)) = (E_{0,1} + E_{0,2}) \exp(i(\vec{k}\vec{r} - \omega t))$$

Zwei um  $90^\circ$  phasenverschobene linear polarisierte Wellen mit gleichem Amplitudenbetrag  $E_0$  und eine Orientierung der Amplituden von  $90^\circ$  ergeben ein zirkular polarisierte Welle.

$$\begin{aligned} \vec{E}_1 + \vec{E}_2 &= \begin{pmatrix} E_0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \exp(i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)) + \begin{pmatrix} 0 \\ E_0 \end{pmatrix} \cdot \exp(i(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \frac{\pi}{2})) \\ &\Rightarrow \Re(\vec{E}_1 + \vec{E}_2) = E_0 \begin{pmatrix} \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t) \\ -\sin(\vec{k}\vec{r} - \omega t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ein Vektor der einen Winkel  $\gamma$  zur y-Achse und dessen x,y-Komponente um  $90^\circ$  zueinander phasen-

verschoben sind bilden ein elliptisch polarisiertes Licht.

$$\begin{aligned}\vec{E}_1 + \vec{E}_2 &= \begin{pmatrix} E_0 \sin(\gamma) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \exp(i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)) + \begin{pmatrix} 0 \\ E_0 \cos(\gamma) \end{pmatrix} \cdot \exp(i(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \frac{\pi}{2})) \\ &\Rightarrow \Re(\vec{E}_1 + \vec{E}_2) = E_0 \begin{pmatrix} \sin(\gamma) \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t) \\ -\cos(\gamma) \sin(\vec{k}\vec{r} - \omega t) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

### 2.3.1 Quarzkeil

Betrachtet wir einen im Querschnitt trapezförmigen Quarzkeil, der ein doppelbrechendes Medium ist. Das Licht fällt auf die Trapezseite ohne Neigung. Betrachtet wird linear polarisiertes Licht, dass senkrecht (Ausbreitungsrichtung) auf den Quarzkeil fällt, sodass keine Brechung und Aufspaltung des ordentlichen und außerordentlichen Strahls geschieht. Aufgrund der steigenden Keildicke erfahren die Strahlkomponenten unterschiedliche Gangunterschiede, wodurch beim Austritt unterschiedliche Polarisierungen auftreten können.

Linear polarisiertes Licht, dessen Amplitude parallel oder senkrecht zur optischen Achse schwingt, erfährt zu keiner Dicke eine Abschwächung, da diese nur mit einem Brechungsindex abgebremst wird.

Fällt das Licht hingegen mit einer Amplitude um  $45^\circ$  zur optischen Achse gedreht, dann treten folgende Polarisierungen auftreten:

Bei einem Gangunterschied  $\Delta OW = m\lambda$   $m \in \mathbb{N}$  erhält man den Ausgangszustand und bei  $(m + \frac{\lambda}{2})\lambda$  den Ausgangszustand um  $90^\circ$  im Uhrzeigersinn gedreht.

Für eine Gangunterschied  $(m + \frac{\lambda}{4})$  erhält man zirkular polarisiertes Licht. Dazwischen treten elliptisch polarisiertes Licht auf, dessen Drehsinn im Uhrzeiger ist.

Bei optischen Wegunterschiede  $\Delta OW = m\lambda$  nimmt die Überlagerung der Teilstrahlen wieder den Ausgangszustand als linear polarisiertes Licht an, welches durch einen Analysator, dessen Durchlassrichtung senkrecht zur Schwingungsebene ist, als dunkler Streifen darstellen.

Der Abstand zweier benachbarten Dunklen Streifen zu den zwei Dicken  $s_2 > s_1$  ist demnach

$$\Delta OW_2 - \Delta OW_1 = (s_2 - s_1)\Delta n = ((m+1) - m)\lambda = \lambda$$

Daraus lässt sich mit dem Winkel  $\alpha$  des Keils und der Länge  $d$  des Keils in Richtung optische Achse durch die Differenz der Keildicken mit  $s_2 - s_1 = d \tan(\alpha)$  die Differenz der Brechzahlen bestimmen.

$$\Delta n = \frac{\lambda}{d \cdot \tan(\alpha)}$$

### 2.3.2 $\frac{\lambda}{4}$ -Plättchen

Die Funktion des Verzögerungsplättchens ist der des Quarzkeils sehr ähnlich, jedoch ist hier die Dicke konstant. Die Lambda-Viertel-Platte besitzt eine Dicke, sodass für eine bestimmte Wellenlänge eine Phasenverschiebung von  $\frac{\pi}{2}$  zwischen außerordentlichen und ordentlichen Strahl hervorgerufen wird.

Im folgenden wird die Intensität der im Versuch verwendeten optischen Bauteile über die Matrixmethode ermittelt. Die Polarisation filtert linear polarisiertes Licht in der horizontalen Stellung aus dem einfallenden Licht heraus. Die darauffolgende Drehmatrix bezieht die Koordinatenachse des Eingangssystem auf die optische Achse des Lambda-Viertelplättchens, welches anschließend eine Phasenverschiebung  $\varphi$  zwischen den Teilstrahlen hervorruft. Das aus der Verzögerungsplatte austretende Licht wird wiederum auf die durchlassende Achse des Analysators mithilfe einer Drehmatrix bezogen. Die Drehmatrizen projizieren die Komponente des  $\vec{E}$ -Feldes, die von den Polarisatoren durchgelassen werden, auf die nachfolgenden Bauteile.

$$\vec{E}(t, \alpha, \beta) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{Analysator}} \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp(i\varphi) \end{pmatrix}}_{\text{Phasenshift}} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{Polarisator}} \vec{E}_0 \exp(i\omega t)$$

Führt man die Matrixrechnung durch erhält man insgesamt

$$\vec{E}(t, \alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \cos \beta \cos \alpha - \sin \alpha \sin \beta \exp(i\varphi) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{E}_0 \exp(i\omega t)$$

Für den Amplitudenvektor des elektrischen Feldes erhalten wir nur die x-Komponente, so ergibt sich für den Betrag

$$E(t, \alpha, \beta) = E_0 (\cos \beta \cos \alpha - \sin \alpha \sin \beta \exp(i\varphi)) \cdot \exp(i\omega t)$$

Die zeitlich gemittelte Intensität berechnet sich aus

$$\begin{aligned} \langle I(\alpha, \beta, \varphi) \rangle_t &= \frac{1}{T} \int_0^T E(t, \alpha, \beta)^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T E_0^2 \underbrace{\exp(i\omega t)^2}_{=1} \cos \beta \cos \alpha - \sin \alpha \sin \beta \exp(i\varphi)^2 dt \\ &= E_0^2 ((\cos \beta \cos \alpha - \sin \alpha \sin \beta \cos \varphi)^2 + (\sin \alpha \sin \beta \sin \varphi)^2) \\ &= E_0^2 (\cos[2](\alpha) \cos[2](\beta) - 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) \sin(\beta) \cos(\beta) \cos(\varphi) + \sin[2](\alpha) \sin[2](\beta)) \end{aligned}$$

Für das Lambda-Viertel-Plättchen mit einer Phasenverschiebung von  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  vereinfacht sich die Intensität

$$\langle I(\alpha, \beta) \rangle_t = E_0^2 (\cos[2](\alpha) \cos[2](\beta) + \sin[2](\alpha) \sin[2](\beta))$$

### 3 Versuchsdurchführung

Für den Versuch wird eine Quecksilberlampe verwendet, dessen Emissionsspektrum die gewünschten Wellenlängen enthält. Zu Beginn wird der Strahl, der von der Quelle über eine Lochblende auf die Linse und anschließend durch den Polarisator fällt, durch Verschiebung dieser genannten optischen Bauteile kollimiert, d.h die divergenten Lichtstrahlen wurden zu einem parallelen Lichtbündel umgewandelt.

Im ersten Versuch wird hinter den Polarisator erst der Quarzkeil und anschließend ein Analysator eingebracht. Durch Farbfilter werden nun die Wellenlängen 436nm, 546nm, 578nm herausgefiltert. Mit einem Lineal werden dann für jede Farbe 6 Mal die am Quarzkeil entstandenen Streifenabstände abgemessen. Es werden außerdem die Winkel ermittelt, an dem keine Streifen entstehen.

Im zweiten Versuch tauschen wir den Quarz mit einem Lambda-Viertel-Plättchen und entfernen die Lochblende. Am Ende des Messtisches wird eine Photodiode angebracht, mit der eine der Intensität proportionale Spannung gemessen werden kann. Für vier verschiedenen Stellungen des Polarisators ( $0, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ$ ) zeichnen wir die Spannung für Analysatorstellungen von  $0$  bis  $180^\circ$  in  $15$  Grad Schritten auf und stellen sie im Polardiagramm dar, um sie mit der Theorie zu vergleichen.

## 4 Ergebnisse & Auswertung

### 4.1 Quarz I

Wir haben hier für jede der drei Wellenlängen jeweils sechs Messungen der Abstände  $x$  von  $n$  Minima oder Maxima durchgeführt, um einen statistischen Fehler für den Abstand zweier Maxima  $d = \frac{x}{n-1}$  berechnen zu können. Folgende Werte wurden gemessen:

$\lambda$ [nm]	$x$ [mm]	$n$	$d$ [mm]	$\langle d \rangle$ [mm]
436	11	5	2.75	$2.663 \pm 0.032$
	16	7	2.67	
	21	9	2.63	
	18.5	8	2.64	
	8	4	2.67	
	10.5	5	2.63	
546	10.5	4	3.5	$3.499 \pm 0.057$
	7	3	3.5	
	17	6	3.4	
	14	5	3.5	
	24	8	3.43	
	22	7	3.5	
578	11	4	3.67	$3.763 \pm 0.079$
	15	5	3.75	
	18.5	6	3.7	
	26	8	3.71	
	15	5	3.75	
	20	6	4.0	

Tabelle 1: Messwerte Quarz

Zusammen mit dem Winkel  $\tan \alpha = \frac{(2,45-1,6)\text{mm}}{49,5\text{mm}} = 0.17$  aus der Anleitung ergeben sich damit folgende Werte für  $\Delta n = \frac{\lambda}{d \cdot \tan \alpha}$ :

$\lambda$ [nm]	$\Delta n$	stat. Fehler	syst. Fehler
436	0.00954	0.00011	0.0018
546	0.00909	0.00015	0.0013
578	0.00894	0.00019	0.0012

Tabelle 2: Ergebnisse Quarz

Für den systematischen Fehler wurde hier angenommen, die Ableseungenauigkeit von  $d$  betrage immer 0.5mm (Hälfte der kleinsten Skala). Man sieht, dass die Differenz der Brechungsindices immer die Größenordnung  $10^{-3}$  hat, und mit steigender Wellenlänge abzunehmen scheint.

### 4.2 Quarz II

Hier wurden für  $\lambda = 546\text{nm}$  mit dem selben Aufbau aus Teil I die Winkel bestimmt, bei denen kein Muster mehr erkennbar ist; die gemessenen Winkel waren  $75^\circ$ ,  $166^\circ$ ,  $257^\circ$  und  $347^\circ$ . Die Differenzen zweier benachbarter Werte sind  $88^\circ$ ,  $91^\circ$ ,  $91^\circ$  und  $90^\circ$ ; also immer sehr nahe an den erwarteten  $90^\circ$ .

### 4.3 $\frac{\lambda}{4}$ -Plättchen

Nun wurde der Quarz und die Blende entfernt und durch ein  $\frac{\lambda}{4}$ -Plättchen ersetzt. Der Polarisator wurde auf vier verschiedene Winkel eingestellt und mit dem Analysator Werte zwischen  $0^\circ$  und  $180^\circ$  relativ dazu eingestellt. Mithilfe einer Photodiode wurde die Intensität des durchkommenden Lichtes gemessen. Trägt man die Messwerte zusammen mit den theoretischen Kurven auf (und spiegelt an der vertikalen Achse), so erhält man folgenden Graphen:

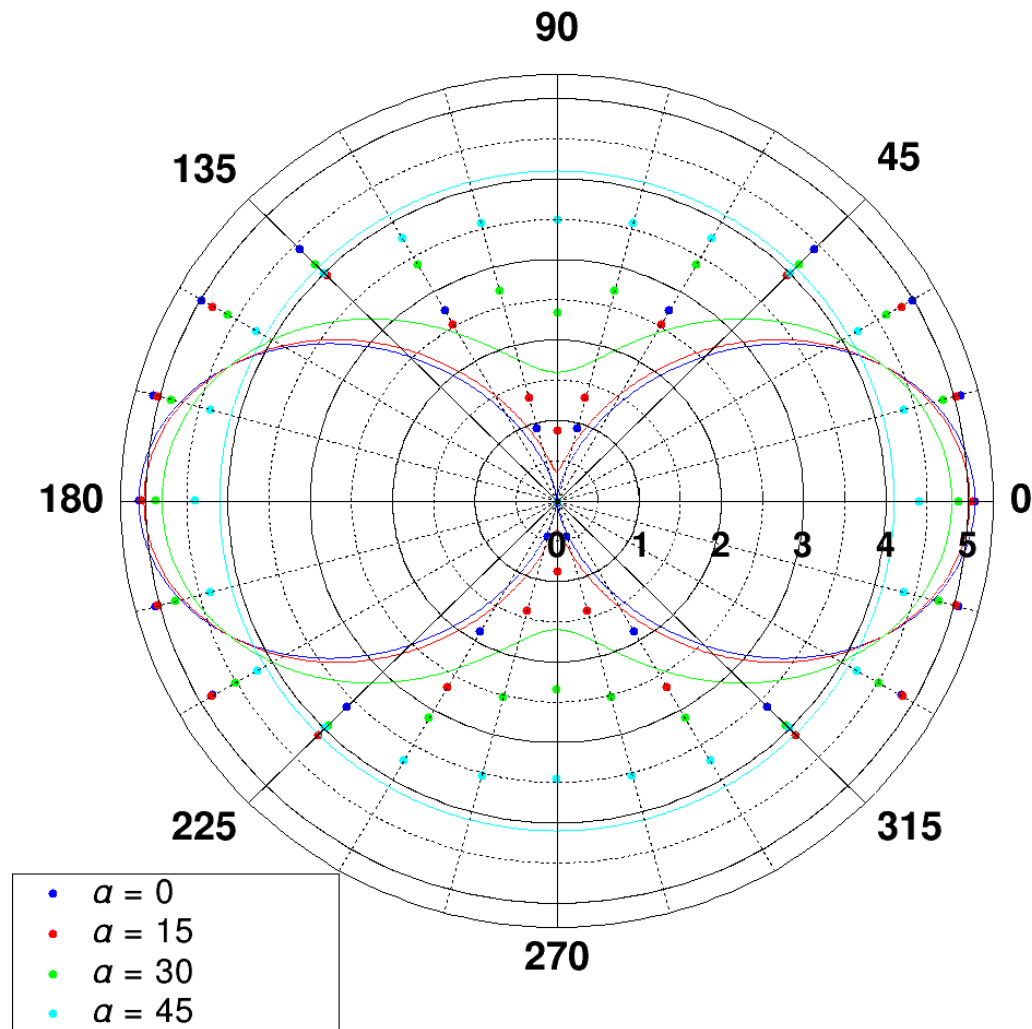


Abbildung 1:  $\frac{\lambda}{4}$ -Plättchen (Punkte sind Messwerte, Linien Theorie)

Man erkennt sehr große Abweichungen zwischen der Theorie und der Praxis. Dies liegt wahrscheinlich an Messungenauigkeiten und einer Abweichung zwischen der Wellenlänge und der tatsächlichen Dicke des Plättchens, was eine zusätzliche Phasenverschiebung erzeugt.

### 4.4 Fazit

Die Versuche konnten die geometrischen Erwartungen und bestätigen die Theorie, welche hinreichend durch die Messung bestätigt wird.